

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

## **Гипотезы о дисперсиях**

Методические указания к практическому занятию  
по дисциплине "Математическая статистика"

**Составители:** Егорова Ю.Б.  
Мамонов И.М.

МОСКВА 2020

## ВВЕДЕНИЕ

Цель практического занятия – изучить способы проверки статистических гипотез о сравнении выборочной дисперсии с генеральной дисперсией и о сравнении двух дисперсий.

**ПРИМЕР 1.** Точность работы термопары в печи измеряется по дисперсии температуры, которая по техническим условиям не должна превышать  $12 (^{\circ}\text{C})^2$ . После измерения температуры 13 изделий была получена «исправленная» выборочная дисперсия  $12,3 (^{\circ}\text{C})^2$ . Можно ли по данным выборки при уровне значимости 0,05 считать, что точность работы термопары соответствует норме?

**РЕШЕНИЕ.** По условию  $n=13$ ;  $D(X)=\sigma_0^2=12 (^{\circ}\text{C})^2$ ;  $S^2=12,3 (^{\circ}\text{C})^2$ ;  $\alpha=0,05$ . Выдвигаем нулевую гипотезу  $H_0: D(X)=\sigma_0^2$ . Относительно альтернативной гипотезы возможны два случая: а)  $D(X)\neq\sigma_0^2$ ; б)  $H_1: D(X)>\sigma_0^2$ . (так как  $S^2 > \sigma_0^2$ ). Рассмотрим эти случаи.

а) Первый случай.

$$H_0: D(X)=12 (^{\circ}\text{C})^2.$$

$$H_1: D(X)\neq 12 (^{\circ}\text{C})^2.$$

В этом случае строят двустороннюю критическую область.

Порядок проверки нулевой гипотезы:

1) по выборке определяем наблюдаемое значение критерия  $\chi_{\text{набл}}^2$ :

$$\chi_{\text{набл}}^2 = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(13-1) \cdot 12,3}{12} = 12,3.$$

2) по таблице критических точек распределения Пирсона (см. Приложение 1) определяем левую и правую критические

точки:  $\chi^2_{л.кр.}\left(1-\frac{\alpha}{2};k\right) = \chi^2_{л.кр.}\left(1-\frac{0,05}{2}=0,975;k=13-1=12\right) = 4,4;$

$$\chi^2_{пр.кр.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right) = \chi^2_{пр.кр.}\left(\frac{0,05}{2}=0,025;12\right) = 23,3.$$

3) Так как  $\chi^2_{л.кр.} < \chi^2_{набл} < \chi^2_{пр.кр.}$ , то нулевая гипотеза принимается.

б) Второй случай.

$$H_0: D(X)=12 (^{\circ}\text{C})^2.$$

$$H_1: D(X)>12 (^{\circ}\text{C})^2.$$

В этом случае строят правостороннюю критическую область.

Порядок проверки нулевой гипотезы:

1) по выборке определяем наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{набл} = 12,3.$$

2) по таблице критических точек распределения Пирсона (см.

Приложение 1) определяем критическую точку

$$\chi^2_{кр.}(\alpha = 0,05;k = 12) = 21.$$

3) Так как  $\chi^2_{набл} = 12,3 < \chi^2_{кр.} = 21$ , то нулевая гипотеза принимается.

Таким образом, с вероятностью 0,95 можно утверждать, что «исправленная» выборочная дисперсия и генеральная дисперсия различаются незначимо и, следовательно, точность работы термопары в печи соответствует норме.

**ПРИМЕР 2.** Технологи механосборочного цеха считают, что применение нового резца позволит сократить время обработки детали. Пять деталей были изготовлены старым резцом: среднее время обработки одной детали составило 3,3 мин с «исправленной» дисперсией – 0,25 мин<sup>2</sup>. Шесть деталей были изготовлены новым резцом: среднее время обработки одной детали составило 2,48 мин с «исправленной» дисперсией – 0,108 мин<sup>2</sup>. При уровне значимости 0,05 проверьте, значимо ли различаются «исправленные» выборочные дисперсии.

**РЕШЕНИЕ.** По условию  $n_1=5$ ;  $\bar{x} = 3,3$  мин;  $S_x^2 = 0,25$  мин.<sup>2</sup>;  $n_2=6$ ;  $\bar{y} = 2,48$  мин;  $S_y^2 = 0,108$  мин.<sup>2</sup>,  $\alpha=0,05$ .

Выдвигаем нулевую гипотезу  $H_0: D(X) = D(Y)$ . Относительно альтернативной гипотезы возможны два случая: а)  $D(X) \neq D(Y)$ .; б)  $H_1: D(X) > D(Y)$ . (так как  $S_x^2 > S_y^2$ ). Рассмотрим эти случаи.

а) Первый случай.

Выдвигаем нулевую гипотезу  $H_0: D(X) = D(Y)$ .

Выдвигаем альтернативную гипотезу  $H_1: D(X) \neq D(Y)$ .

В этом случае строят двустороннюю критическую область.

Порядок проверки нулевой гипотезы:

1) по выборке определяем наблюдаемое значение критерия  $F_{набл}$ :

$$F = \frac{S_{\bar{b}}^2}{S_m^2} = \frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{0,25}{0,108} = 2,3.$$

2) по таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора (см. Приложение 2) определяем критическую точку  $F_{кр.}\left(\frac{\alpha}{2}; k_1; k_2\right)$  в зависимости от уровня значимости

$\alpha=0,05$  и числа степеней свободы  $k_1=n_1-1=5-1=4$  и  $k_2=n_2-1=6-1=5$ :

$$F_{кр.}\left(\frac{\alpha}{2}; k_1; k_2\right) = F_{кр.}\left(\frac{0,05}{2}; 4; 5\right) = 7,39.$$

3) Если  $F_{набл} = 2,3 < F_{кр} = 7,39$ , то нулевая гипотеза принимается.

б) Второй случай.

Выдвигаем нулевую гипотезу  $H_0: D(X) = D(Y)$ .

Выдвигаем альтернативную гипотезу  $H_1: D(X) > D(Y)$ .

В этом случае строят правостороннюю критическую область.

Порядок проверки нулевой гипотезы:

1) по выборке определяем наблюдаемое значение критерия

$$F_{набл} = 2,3.$$

2) по таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора (см. Приложение 2) определяем критическую точку  $F_{кр.}(\alpha; k_1; k_2)$  в зависимости от уровня значимости  $\alpha=0,02$  и числа степеней свободы  $k_1=n_1-1=5-1=4$  и  $k_2=n_2-1=6-1=5$ :

$$F_{кр.}(\alpha; k_1; k_2) = F_{кр.}(0,02; 4; 5) = 5,19.$$

3) Если  $F_{набл} = 2,3 < F_{кр} = 5,19$ , то нулевая гипотеза принимается.

Таким образом, с вероятностью 0,95 можно утверждать, что «исправленные» выборочные дисперсии различаются незначимо и, следовательно, можно считать, что генеральные дисперсии равны.

## **ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема  $n=21$  и по ней определена исправленная выборочная дисперсия  $S^2=16,2$ . При уровне значимости  $0,05$  проверить нулевую гипотезу о том, что генеральная дисперсия равна  $15$ .
2. По двум независимым выборкам  $n_1=11$  и  $n_2=14$ , извлеченным из нормальных генеральных совокупностей  $X$  и  $Y$ , найдены исправленные дисперсии  $S_x^2=0,76$  и  $S_y^2=0,38$ . При уровне значимости  $0,95$  проверить нулевую гипотезу о равенстве двух генеральных совокупностей дисперсий.

## **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Сформулируйте основные принципы проверки гипотез.
2. Как проверяется гипотеза о равенстве «исправленной» выборочной дисперсии и генеральной дисперсии?
3. Как проверяется гипотеза о равенстве двух «исправленных» выборочных дисперсий?

# Приложение 1

## Критические точки распределения Пирсона

Число степеней свободы $k$	$\chi^2$ при уровне значимости $\alpha$		
	0,975	0,025	0,05
1	0,001	5,0	3,8
2	0,051	7,4	6,0
3	0,216	9,4	7,8
4	0,484	11,1	9,5
5	0,831	12,8	11,1
6	1,24	14,4	12,6
7	1,69	16,0	14,1
8	2,18	17,5	15,5
9	2,70	19,0	16,9
10	3,25	20,5	18,3
11	3,82	21,9	19,7
12	4,40	23,3	21,0
13	5,01	24,7	22,4
14	5,63	26,1	23,7
15	6,26	27,5	25,0
16	6,91	28,8	26,3
17	7,56	30,2	27,6
18	8,23	31,5	28,9
19	8,91	32,9	30,1
20	9,59	34,2	31,4
21	10,3	35,5	32,7
22	11,0	36,8	33,9
23	11,7	38,1	35,2
24	12,4	39,4	36,4
25	13,1	40,6	37,7
26	13,8	41,9	38,9
27	14,6	43,2	40,1
28	15,3	44,5	41,3
29	16,0	45,7	42,6
30	16,8	47,0	43,8

## Приложение 2

### Критические точки распределения Фишера-Снедекора

Уровень значимости $\alpha=0,05$										
$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97
Уровень значимости $\alpha=0,025$										
$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	645	800	864	900	922	937	948	957	963	968
2	38,5	39	39,18	39,2	39,3	39,33	39,36	39,38	39,387	39,398
3	17,4	16,1	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,47	14,42
4	12,2	10,7	9,9	9,6	9,36	9,19	9,07	8,98	8,91	8,84
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62
6	8,81	7,26	6,59	6,23	5,99	5,82	5,69	5,60	5,52	5,46
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,89	4,82	4,76
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,29
9	7,21	5,71	5,08	4,71	4,48	4,32	4,19	4,10	4,03	3,96
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,86	3,78	3,72

Примечание:  $k_1$  – число степеней свободы большей дисперсии;  $k_2$  – число степеней свободы меньшей дисперсии.